Quadratische Gleichungen mit Parameter
Übung

1. Gegeben ist die Gleichung $x^2 + 4x + 2c = 0$ mit $c \in \mathbb{R}$.

   a) Geben Sie die Gleichung für $c = -1$ und für $c = 2$ an.

   b) Berechnen Sie die Lösungsmenge der Gleichung für $c = 0$.

   c) Bestimmen Sie die Anzahl der Lösungen in Abhängigkeit von $c \in \mathbb{R}$.

   d) Geben Sie die Lösungsmenge für den Fall $c < 2$ an.

2. Zu betrachten ist die Gleichung $x^2 + 2dx - 2x + d = 1$ mit $d \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die Werte für d so, dass die Gleichung genau eine Lösung besitzt und geben Sie jeweils diese Lösung an.

3. Ermitteln Sie jeweils die Anzahl der Lösungen in Abhängigkeit vom jeweiligen Parameter. Geben Sie die entsprechenden Lösungen mit an.

   a) $\frac{1}{3}(x - k)(x - 2k) = 0,\ k \in \mathbb{R}$

   b) $ax^2 - 4ax + 3a = 0;\ a \neq 0$

   c) $x^2 + 2x + k = 0;\ k \in \mathbb{R}$

   d) $ax^2 = a^2x,\ a \in \mathbb{R}, a \neq 0$

   e) $2x^2 - 3tx + t^2 = 0;\ t \in \mathbb{R}$

   f) $3x^2 + bx + 3 = 0;\ b \in \mathbb{R}$

   g) $x^2 - 2dx - 6d = -3x;\ d \in \mathbb{R}$

   h) $mx^2 + (m + 2) \cdot x + 3 = 3x^2 + 2;\ m \in \mathbb{R}$

4. Finden Sie eine quadratische Gleichung, die genau folgende Lösungsmenge besitzt.

   a) $L = \{1; a\}$ für $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

   b) $L = \{b\}$ für $b \in \mathbb{R}$

   c) $L = \{-c; c\}$ für $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Quadratische Gleichungen mit Parameter
Lösung

1.

a) $x^2 + 4x - 2 = 0$ bzw. $x^2 + 4x + 4 = 0$
b) $x^2 + 4x = 0$; $L = \{0; -4\}$
c) $D = 16 - 8c$
1. Fall: $D > 0$ für $c < 2$ zwei verschiedene Lösungen
2. Fall: $D = 0$ für $c = 2$ eine (doppelte) Lösung
3. Fall: $D < 0$ für $c > 2$ keine Lösung
d) Für $c < 2$ zwei verschiedene Lösungen $L = \{-2 \pm \sqrt{4 - 2c}\}$

2. $x^2 + (2d - 2)x + (d - 1) = 0$
$D = (2d - 2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (d - 1) = 4d^2 - 12d + 8$
$D = 0 \Leftrightarrow d_1 = 1 \vee d_2 = 2$. Für $d_1 = 1$ ist $L = \{0\}$, für $d_2 = 2$ ist $L = \{-1\}$

3.

a) $x_1 = k, x_2 = 2k$

1. Fall: $k = 0$	2. Fall: $k \neq 0$
Eine Lösung	Zwei Lösungen
$L = \{0\}$	$L = \{k; 2k\}$

b) $L = \{1; 3\}$

c) $D = 4 - 4k$

1. Fall: $D > 0$ für $k < 1$	2. Fall: $D = 0$ für $k = 1$	3. Fall: $D < 0$ für $k > 1$
zwei verschiedene Lösungen	eine (doppelte) Lösung	keine Lösung
$L = \{-2 \pm \sqrt{1 - k}\}$	$L = \{-2\}$	$L = \emptyset$

d) $ax(x - a) = 0, x_1 = 0, x_2 = a$
Wegen $a \neq 0$ zwei Lösungen $L = \{0; a\}$

e) $D = \frac{1}{4}t^2$

1. Fall: $t = 0$	2. Fall: $t \neq 0$
Eine Lösung	Zwei Lösungen
$L = \{0\}$	$L = \left\{\frac{t}{2}, t\right\}$

f) $D = b^2 - 36$
1. Fall: $b < -6$ zwei Lösungen: $L = \left\{\frac{-b-\sqrt{b^2-36}}{6}; \frac{-b+\sqrt{b^2-36}}{6}\right\}$
2. Fall: $b = -6$ eine Lösung: $L = \{1\}$
3. Fall: $-6 < x < 6$ keine Lösung: $L = \emptyset$
4. Fall: $b = 6$ eine Lösung: $L = \{-1\}$
5. Fall: $b > 6$ zwei Lösungen: $L = \left\{\frac{-b-\sqrt{b^2-36}}{6}; \frac{-b+\sqrt{b^2-36}}{6}\right\}$

g) $x^2 + (3-2d)x - 6d = 0$

$D = (3-2d)^2 + 24d = 9 - 12d + 4d^2 + 24d = 9 + 12d + 4d^2 = (3+2d)^2$

1. Fall: $d = -\frac{3}{2}$
Eine Lösung
$L = \{-3\}$

2. Fall: $d \neq -\frac{3}{2}$
Zwei Lösungen
$L = \{-3; 2d\}$

h) $(m-3)x^2 + (m+2) \cdot x + 1 = 0$

$D = (m+2)^2 - 4 \cdot (m-3) \cdot 1 = m^2 + 4m + 4 - 4m + 12 = m^2 + 16 > 0$

1. Fall:
Für alle $m \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ zwei verschiedene Lösungen $L = \left\{\frac{-(m+2) \pm \sqrt{m^2+16}}{2(m-3)}\right\}$

2. Fall:
Für $m = 3$ ergibt sich die lineare Gleichung $5x + 1 = 0$ mit $L = \left\{-\frac{1}{5}\right\}$

4.

a) z.B. $(x-1)(x-a) = 0$
b) z.B. $(x-b)^2 = 0$
c) z.B. $x^2 - c^2 = 0$